Anuário do Instituto de Geociências - UFRJ
www.anuario.igeo.ufrj.br

O Estado da Arte dos Métodos de Assimilação de Dados
The State of Art of Data Assimilation Methods

Vinicius Carvalho Beck; Yoshihiro Yamasaki & Fabrício Pereira Härter

Universidade Federal de Pelotas - Faculdade de Meteorologia
Avenida Engenheiro Ildefonso Simões Lopes, 2751, Arco-Íris, 96060-290, Pelotas, RS – Brasil
E-mails: fabricio.harter@ufpel.edu.br; yamasaki07722@gmail.com; vonoco@gmail.com
Recebido em: 29/10/2015 Aprovado em: 28/04/2016
DOI: http://dx.doi.org/10.11137/2016_2_133_144

Resumo

O procedimento de combinar modelos matemáticos com dados ruidosos, com o objetivo de melhorar a previsão do tempo por métodos estatísticos, constitui uma importante e desafiadora linha de pesquisa em meteorologia, conhecida como assimilação de dados. As técnicas atuais de assimilação são baseadas no método gaussiano dos mínimos quadrados. Neste trabalho são apresentados os principais avanços da área de assimilação de dados, desde os métodos empíricos, criados nos anos 1950, até os métodos atuais, bem como suas versões derivadas e híbridas. Ressalta-se que o surgimento dos métodos híbridos *ensemble*/variacionais, a assimilação direta de radiâncias de satélite e a assimilação de dados de radar são os maiores avanços na área nos últimos anos.
Palavras-chave: assimilação de dados; filtragem de Kalman; métodos variacionais

Abstract

The procedure to combine mathematical models with inaccurate and noisy data, improving weather forecasting by statistical methods, is an important and challenging line of research in meteorology, known as data assimilation. Current techniques of data assimilation are based on Gaussian Least Squares Method. This paper presents the main advances in data assimilation, since the empirical methods, created in the 1950s, to the current methods, as well as their derivatives and hybrid versions. It is note that the emergence of hybrid methods ensemble/variational and improved in the satellite and radar data assimilation techniques are major advances in the field in recent years. It is concluded that the variational methods and the Kalman filtering are the state of the art of data assimilation techniques.
Palavras-chave: data assimilation; 3DVAR; WRF; mesoscale

1 Introdução

A evolução dos métodos numéricos e dos sistemas computacionais no século XX impulsionou o desenvolvimento da Previsão Numérica do Tempo (PNT). Atualmente, os centros operacionais utilizam modelos numéricos como ferramenta básica e fundamental na elaboração de análises e previsões de tempo. Várias metodologias vêm sendo desenvolvidas para melhorar a previsão, dentre as quais: parametrizações físicas; parametrizações *cumulus*; métodos de discretização das equações diferenciais; métodos de inicialização; técnicas de previsão por conjuntos. Uma metodologia desenvolvida desde os anos 1950 para reduzir os erros dos modelos de PNT, consiste em introduzir dados de observação na dinâmica destes modelos, fazendo com que as variáveis tendam a assumir valores melhor correlacionados com a realidade física observada. Este procedimento, de combinar dados observacionais e modelos matemáticos para reduzir o erro da previsão é denominado assimilação de dados.

A assimilação de dados é uma linha de pesquisa multidisciplinar, visto que pode ser aplicada a muitas áreas, tais como robótica - correção de rotas, engenharia de satélites - correção de órbitas, oceanografia e meteorologia - redução do erro na análise e previsão de variáveis.

A assimilação de dados meteorológicos surgiu da necessidade de elaborar análises precisas. Isto porque a simples interpolação dos dados do espaço físico para a grade dos modelos não é suficientemente representativa, pois os modelos numéricos de equações primitivas possuem um elevado número de graus de liberdade, comparado à quantidade de observações disponíveis.

As primeiras técnicas de assimilação de dados foram desenvolvidas com base em parâmetros empíricos para estimar a covariância dos erros de observação e estimativa dos modelos de PNT. As técnicas atuais de assimilação são baseadas no método gaussiano dos mínimos quadrados para estimar estas covariâncias.

2 Material e Métodos

O material utilizado neste trabalho é constituído pela vasta produção bibliográfica produzida, sobretudo nos últimos anos, sobre o tema assimilação de dados.

A metodologia consiste em desenvolver uma revisão bibliográfica dos principais avanços dos métodos de assimilação de dados, e discutir estes métodos do ponto de vista matemático e computacional.

3 Resultados e Discussão

A seguir, são apresentados os principais métodos de assimilação de dados e os principais avanços na área nas últimas décadas.

3.1 Previsão Numérica do Tempo

No início do século XX, Bjerknes (1911) aborda matematicamente a previsão do tempo como um Problema de Valor Inicial (PVI). Segundo o autor, dadas as condições iniciais e de fronteira apropriadas e leis físicas que representem com precisão os movimentos atmosféricos, pode-se prever o estado futuro da atmosfera. Com base no trabalho de Bjerknes (1911), Richardson (1922) fez a primeira tentativa de PNT para um caso real. Ele integrou, manualmente, as equações do movimento. Neste experimento, a Condição Inicial (CI) também foi elaborada manualmente, com interpolação dos dados observados para a grade do modelo de equações primitivas. O modelo registrou variações de até 146 hPa, relativo a uma previsão de 24 horas, em locais onde não houve alteração alguma na pressão atmosférica. Apesar dos grandes erros de estimativa, o experimento desempenhou um papel fundamental para o desenvolvimento da PNT, pois serviu de referência para subsequentes trabalhos de pesquisa.

Tendo em vista que o procedimento manual de elaboração da CI, denominado análise subjetiva, demandava muito tempo para ser realizado, ficou clara a necessidade de elaboração automática para pontos de grade de modelos de equações primitivas. Na década de 1950, os pesquisadores chamaram este novo processo de análise objetiva. Panofsky (1949) interpolou automaticamente os campos de pressão e vento, e calculou numericamente a divergência do vento, introduzindo a análise objetiva na PNT. Gilchrist

& Cressman (1954), através da análise objetiva, obtiveram uma representação da estabilidade vertical mais precisa do que aquela que vinha sendo obtida anteriormente por análise subjetiva.

3.2 Métodos Empíricos

Devido à grande diferença entre o número de observações disponíveis para interpolação e o número de variáveis livres dos modelos de equações primitivas, Bergthórsson & Döös (1955) na Suécia, e posteriormente Cressman (1959) nos Estados Unidos, propuseram o Método das Correções Sucessivas (MCS) para assimilação de dados.

No MCS, a primeira estimativa é dada pelo campo de *background*, representado como $f_i^0 = f_i^b$, onde f_i^b denota o campo de *background* avaliado no *i*-ésimo ponto de grade, e f_i^0 denota o campo correspondente na iteração zero da estimativa do *i*-ésimo ponto de grade. Ou seja, isto significa que o campo de *background* fornece o campo inicial da integração do modelo. Após a primeira estimativa f_i^0, as estimativas subsequentes são obtidas por correções sucessivas pela seguinte expressão:

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\sum_{k=1}^{k_i^n} w_{ik}^n (f_{ik}^0 - f_{ik}^n)}{\sum_{k=1}^{k_i^n} w_{ik}^n + \varepsilon^2},$$

onde f_i^n é a *n*-ésima iteração estimada no ponto de grade i, k_i^n é o número de observações analisadas no ponto de grade i, f_{ik}^0 é a *k*-ésima observação ao redor do ponto de grade i, f_{ik}^n é o valor estimado pelo modelo da *n*-ésima iteração no ponto observado (obtido pela interpolação dos pontos ao redor do ponto de grade i), e ε^2 é uma estimativa da razão entre a variância do erro de observação e a variância do erro de *background*. Os pesos w_{ik}^n podem ser definidos de diferentes maneiras. Cressman (1959), por exemplo, definiu os pesos do MCS como

$$\begin{cases} r_{ik}^2 \leq R_n^2 \Rightarrow w_{ik}^n = \frac{R_n^2 - r_{ik}^2}{R_n^2 + r_{ik}^2} \\ r_{ik}^2 > R_n^2 \Rightarrow w_{ik}^n = 0 \end{cases},$$

onde r_{ik}^2 é o quadrado da distância entre um ponto de observação r_k e o ponto de grade r_i. O número R_n, chamado de raio de influência de um ponto de grade i, é uma distância radial que determina quantas e quais observações, dentro deste raio, são analisadas para o ponto de grade i. Este número pode variar de iteração para iteração.

Barnes (1964, 1978) utilizou o MCS para assimilar dados reais de radar, e obteve previsões precisas para os campos de pressão na superfície, determinando empiricamente os pesos de cada observação, através da expressão $w_{ik}^n = e^{-r_{ik}^2/2R_n^2}$, onde o raio de influência R_n muda por um fator $\gamma\gamma$ (constante) a cada iteração, isto é,

$$R_{n+1}^2 = \gamma R_n^2.$$

Devido ao alto custo computacional do MCS, muitos pesquisadores trabalharam no desenvolvimento de métodos computacionais mais econômicos. Kistler (1974), Hoke & Anthes (1976) apresentaram um método empírico de assimilação de dados, conhecido como *Nudging*. Ele consiste em adicionar às equações prognósticas um termo que força a solução do modelo na direção das observações.

Stauffer & Seaman (1990) assimilaram dados de temperatura e vento, utilizando o método *Nudging* em um modelo desenvolvido pela *Pennsylvania State University* (PSU) e *Numerical Center for Atmospherical Research* (NCAR). Eles relataram um impacto positivo na aplicação do método para sistemas de mesoescala e de escala sinótica.

Um exemplo de aplicação do *Nudging* é dado por Kalnay (2003), que utiliza este método para representar a equação que prevê a velocidade zonal em um modelo de equações primitivas como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V.\nabla u + fv - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{u_{obs} - u}{\tau_u}.$$

Nota-se que no último termo, tem-se u_{obs}, que é velocidade zonal observada. O símbolo τ denota a escala de tempo do relaxamento, sendo escolhida com base em considerações empíricas. Hoke & Anthes (1976) sugerem que τ deve ser escolhido de maneira tal que o último termo possua magnitude similar a magnitude do termo predominante. Isto evita que a solução convirja rápido demais para as observações, em decorrência de τ ser muito pequeno, ou que os erros do modelo cresçam antes da ação do método, em decorrência de τ ser muito grande.

No Brasil, uma das primeiras aplicações do método *Nudging* foi realizada por Gonçalves & Innocentini (1999), que assimilaram dados de temperatura inferidos por satélite. Foi estimado o impacto da assimilação destes dados no Modelo Japonês de Área Limitada. Os autores concluíram que a assimilação de temperatura foi suficiente para se obter melhoras significativas na previsão, com aumento do custo computacional de no máximo 5%; indicando a viabilidade na utilização da técnica *Nudging* para uso operacional.

Apesar dos bons resultados obtidos com o *Nudging*, a precisão exigida pelo método, no ajuste do termo que força o modelo para os valores observados, levou os pesquisadores a desenvolver técnicas de atualização automática de parâmetros ajustáveis.

3.3 Método dos Mínimos Quadrados

Os métodos empíricos de assimilação de dados foram amplamente utilizados até a década de 1980, quando foram substituídos por métodos de correção direta dos parâmetros ajustáveis dos modelos. Este tipo de abordagem baseia-se no Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), criado pelo matemático Karl Friedrich Gauss (SORENSON, 1970). A versão linear do MMQ também é referenciada na literatura como Regressão Linear (SNEDECOR, 1971), e consiste em aproximar sequências de dados de observação por funções, através da determinação de parâmetros que podem ser ajustados ao longo do tempo. A seguir, será feita uma breve descrição matemática do MMQ.

Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pontos do plano $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano), onde na primeira coordenada de cada ponto tem-se o valor de certa variável x, e na segunda coordenada temos o valor de outra variável y, dependente de x.

O MMQ, na sua versão linear, consiste em encontrar uma função polinomial linear $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a_0 + a_1 x$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, que melhor se aproxime do gráfico de pontos discretos construído com base em algumas medições de x e y. É evidente que (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) nem sempre determinam uma função polinomial linear, de modo que a igualdade $f(x_i) = y_i$ não é necessariamente verificada para todos os pontos (x_i, y_i) do domínio da função f . Logo, cada medição possui um erro ε_i, onde $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$.

O critério para determinar a reta que melhor se adapta ao conjunto de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) , ... , (x_n, y_n) é escolher o mínimo dentre as somas dos quadrados dos erros, isto é,

$$min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2} = min \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

para determinar os coeficientes a_0 e a_1 da equação $f(x) = a_0 + a_1 x$.

Em termos de matrizes, isto significa que,

sendo $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$,

considerando como produto interno $\langle , \rangle$ o produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e como norma $\|\ \ \|$ a norma euclidiana do $\mathbb{R}^2$, ou seja o módulo $|\ \ |$, tendo em vista que

$$\|Y - XA\|^2 = \langle Y - XA, Y - XA \rangle = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

devemos determinar A que minimiza $\|Y - XA\|^2$.

Anuário do Instituto de Geociências - UFRJ
ISSN 0101-9759 e-ISSN 1982-3908 - Vol. 39 - 2 / 2016 p. 133-144

A reta $f(x) = a_0 + a_1 x$ que minimiza $\|Y - XA\|^2$ é chamada de Aproximação Linear pelos Mínimos Quadrados (ALMQ). Segundo Gonçalves (2005), a ALMQ é obtida para $\hat{A} = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

O teorema a seguir fornece condições para determinar A que minimiza $\|Y - XA\|^2$ para o caso em que y depende de m variáveis analisadas em n medições. Matricialmente, $Y = AX$.

Teorema: Sejam $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ matrizes, cujas colunas formam um conjunto linearmente independente, com $m \leq n$. Então existe uma única matriz $\hat{A}$ tal que $\|Y - X\hat{A}\| \leq \|Y - XA\|, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Além disso, tem-se que $\hat{A} = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

Nota-se que o teorema enunciado acima constitui uma generalização da ALMQ, que fornece explicitamente a expressão de $\hat{A}$ para o caso geral (Gonçalves, 2005).

Os avanços da Teoria de Estimação possibilitaram algumas extensões do MMQ, tais como o Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (MMQP) e o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo (MMQR).

O MMQP é uma extensão do MMQ que utiliza pesos para as medidas quando algumas medidas y são mais precisas do que outras. Neste caso, em lugar de calcular $\hat{A}$ para minimizar $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}$, deve-se calcular $\hat{A}$ para minimizar $\theta . Y$, onde θ é a matriz que relaciona os pesos de cada erro de precisão ε_i obtido na respectiva medição Y_i. Pondo $C = \theta^T \theta$, a solução é dada pela expressão $\hat{A} = (X^T C X)^{-1} X^T C Y$.

Alternativamente, pode-se dizer que o MMQP é uma técnica de minimização do erro esperado na estimativa, medida pela matriz de covariância dos erros de estimativa P, dada por $P = (X R^{-1} X)^{-1}$, onde R é a matriz de covariância dos erros de observação. Além disso, segundo Sorenson (1970), supondo $C = R^{-1}$ (suposição feita inicialmente por Gauss), resulta que $\hat{A} = (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} Y$.

Sorenson (1970) descreve o MMQR como uma evolução do MMQ que utiliza a idéia de recursividade, isto é, o estimador inicial é atualizado a cada medição com o auxílio da medição anterior. Denota-se $\widehat{w}_0$ para o estimador inicial, $\widehat{w}_1$ para o estimador que agrega a observação Y_1, $\widehat{w}_2$ para o estimador que agrega a observação Y_2, e assim sucessivamente. De maneira genérica, denota-se por $\widehat{w}_i$ o estimador que agrega a observação Y_i. Sendo assim, tem-se

$$\begin{cases} \widehat{w}_0 = \text{"chute inicial"} \\ \widehat{w}_1 = \widehat{w}_0 + G_1(Y_1 - Y_0) \\ \widehat{w}_i = \widehat{w}_{i-1} + G_i(Y_i - Y_{i-1}) \end{cases},$$

onde $\widehat{w}_0$ é uma estimativa *a priori*, chamada de chute inicial ou *background*; $G_i = P_i X_i^T R_i^{-1}$ é chamada de matriz ganho; cada etapa do cálculo $Y_i - Y_{i-1}$ é chamada de inovação; e o produto $G_i(Y_i - Y_{i-1})$ é chamado de correção.

3.4 Interpolação Ótima

A generalização do MMQ para campos vetoriais, denominada Interpolação Ótima (IO), foi apresentada primeiramente por Eliassen & Bessemoulin (1960). No entanto, independentemente, Gandin (1963) também derivou as equações para múltiplas variáveis e as aplicou como método de análise objetiva. Pesquisadores e meteorologistas operacionais utilizaram amplamente o esquema de análise desenvolvido por Gandin, sobretudo nas décadas de 1980 e 1990 (Kalnay, 2003).

3.5 Filtragem de Kalman

Atualmente, as técnicas que representam o estado da arte em assimilação de dados são metodologias fundamentadas na teoria da filtragem de Kalman e no cálculo variacional. Existem muitas versões de cada uma destas técnicas, além dos métodos híbridos, que combinam os fundamentos dos métodos básicos e seus derivados.

A seguir, são apresentados alguns resultados obtidos com o Filtro de Kalman (FK). A versão original do FK (Kalman, 1960) apresenta a solução ótima para a minimização dos erros de modelos de dinâmica linear e distribuição gaussiana. À problemas não-lineares, aplica-se uma versão do FK chamada Filtro de Kalman Estendido (FKEst), que é utilizada em modelos meteorológicos e outros tipos de modelos não-lineares. Outra técnica amplamente utilizada, sobretudo após a década de 1990, é o Filtro de Kalman por *Ensemble* (FKEns). Ela consiste na implementação simultânea de k ciclos de assimilação de dados através do FK, onde cada membro do conjunto recebe uma perturbação distinta para calcular a covariância dos erros de estimativa. Ressalta-se que, ao contrário do FKEst, o FKEns não exige a linearização do modelo de PNT.

As equações do FK podem ser deduzidas a partir do MMQR. Para mais detalhes a respeito da evolução histórica da teoria da estimação e do surgimento da técnica FK, pode-se consultar Sorenson (1970).

Segundo Härter (2007), o FK difere do MMQR por não se restringir a parâmetros, sendo mais geral. Após uma estimativa inicial para w_0^f e P_0^f, utilizando o sobreíndice f para significar fase de propagação ou previsão e o sobreíndice a para significar fase de atualização - ou assimilação, cada iteração de uma aplicação do FK passa por quatro etapas:

1) Previsão a partir do modelo:

$$w_{i+1}^f = F_i w_i^a$$

$$P_{i+1}^f = F_i P_i^a F_i^T + Q_i$$

onde w_{i+1}^f é a previsão, F_i é a matriz de dinâmica do sistema, w_i^a é a análise, P^f é a matriz de covariância dos erros de estimativa, P^a é a matriz de covariância dos erros de estimativa obtida pela análise e Q_i é a matriz de covariância do ruído de observação.

2) Cálculo da Matriz ganho:

$$G_{i+1} = P_{i+1}^f H_{i+1}^T [R_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1}^f H_{i+1}^T]^{-1}$$

onde G_{i+1} é a matriz ganho, H_{i+1} é um operador que transforma as grandezas medidas pelos instrumentos meteorológicos nas grandezas utilizadas pelo modelo e R_{i+1} é a matriz de covariância dos erros de observação.

3) Cálculo da estimativa:

$$w_{i+1}^{est} = H_{i+1} w_{i+1}^f$$

onde w_{i+1}^{est} é uma estimativa para o vetor w_{i+1} real (sempre desconhecido).

4) Análise:

$$w_{i+1}^a = w_{i+1}^f + G_{i+1}(w_{i+1}^{obs} - w_{i+1}^{est})$$

onde w_{i+1}^{obs} é o vetor w_{i+1} medido (com erro de medição).

$$P_{i+1}^a = [I - G_{i+1} H_{i+1}] P_{i+1}^f$$

onde I é a matriz identidade.

O FKEst segue os mesmos passos do FK original, diferindo apenas pelo fato de calcular a covariância dos erros de estimativa linearizando as trajetórias não-lineares do modelo F_i. Na verdade, substitui-se o modelo F_i por um modelo L_i, chamado de Modelo Tangente Linear (MTL). O MTL é uma matriz que transforma uma perturbação final do tempo t_i, em uma perturbação inicial do tempo t_{i+1}.

O FKEns consiste na implementação simultânea de k ciclos de assimilação de dados (Anderson, 2001). Todos estes ciclos assimilam as mesmas observações, porém cada um recebe uma perturbação aleatória diferente em cada observação. Segundo Evensen (1994a, 1994b), este conjunto de sistemas de assimilação de dados pode ser utilizado para estimar a covariância dos erros. Após completar os kk ciclos, e obter as previsões $w_{i+1}^{f,k} = F_i^k w_i^a$, existem diferentes maneiras de calcular $P^f P^f$. Kalnay (2003), sugere $P^f \approx \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} (x^{f,k} - \bar{x}^f)(x^{f,k} - \bar{x}^f)^T$.

Na literatura são encontradas formas alternativas do cálculo de P^f, onde valores muito distantes da média são excluídos do *ensemble*. Na equação abaixo, por exemplo, excluí-se o elemento ll do *ensemble*, resultando na seguinte aproximação:

$$P^{f,l} \approx \frac{1}{k-2}\sum_{k \neq l}(x^{f,k} - \bar{x}^{f,l})(x^{f,k} - \bar{x}^{f,l})^T.$$

O FKEns não exige linearização da matriz de dinâmica do sistema, nem da matriz de covariância do erro de previsão. Esta é uma grande vantagem sobre os métodos de Filtragem de Kalman precedentes (Kalnay, 2003).

Evensen (1997) apresenta um exemplo de aplicação do FKEns nas equações de Lorenz (1963), com um impacto positivo da assimilação dos dados sintéticos, gerados a partir do modelo para as três variáveis do modelo. Com base no trabalho de Evensen (1997), Pham (2001) utilizou o FKEns em uma aplicação com o atrator de Lorenz (1963), obtendo melhores resultados do que os anteriormente obtidos com o FKEst. Kivman (2003) utilizou o FKEns para estimar parâmetros de um sistema de Lorenz não-linear e estocástico. Ele constatou que o FKEns obteve melhor performance para as variáveis do modelo em relação a outras técnicas de assimilação utilizadas anteriormente.

Como a assimilação de dados meteorológicos é um problema de instabilidade e dimensão, Härter (2007) apresentou um estudo utilizando redes neurais artificiais, para emular um FK no contexto de assimilação de dados. Esta metodologia possibilitou a redução do custo computacional do procedimento de assimilação. Também com o intuito de reduzir o custo computacional, Härter & Campos Velho (2008) utilizaram uma rede neural para emular um FKEst aplicado ao modelo de equações primitivas DYNAMO-1D, obtendo redução do custo computacional na implementação do método.

Ao longo dos anos, têm sido propostos na literatura algumas variações do FK, tais como o Filtro de Kalman Regulado por *Ensemble* (FKREns), apresentado por Anderson (2001); o Filtro de Kalman Transformado por *Ensemble* (FKTEns) introduzido por Bishop *et al.* (2001); e o Filtro de Kalman Transformado por *Ensemble* Local (FKTEnsL), descrito por Ott *et al.* (2004). Takemasa & Kunii (2012), aplicaram o FKTEnsL em uma importante implementação no modelo meteorológico WRF, para assimilar dados reais de pressão reduzida ao nível médio do mar, magnitude do vento em 850hPa e precipitação acumulada em 6 horas. Eles relataram melhora na previsão destas variáveis em relação a previsão do WRF sem assimilação de dados.

No Brasil, alguns trabalhos foram desenvolvidos com a utilização do FKTEnsL na previsão do tempo. Medeiros *et al.* (2010) relataram melhora na previsão de temperatura utilizando medidas diretas de radiâncias de satélite no sistema de assimilação operacional do Centro de Previsões e Estudos Climáticos (CPTEC) do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), que utiliza o FKTEnsL como método de assimilação de dados. Aravéquia *et al.* (2010) descreveram os avanços obtidos no CPTEC/INPE com a utilização do FKTEnsL, particularmente em regiões com baixos índices de acerto na previsão do modelo sem assimilação.

3.6 Métodos Variacionais

Os métodos de assimilação de dados baseados no cálculo variacional foram desenvolvidos a partir do trabalho de Sasaki (1958). A idéia básica de tais métodos é minimizar uma função custo, diretamente proporcional aos erros de observação e de estimativa de modelos numéricos. A versão tridimensional do método de Sasaki (1958) ficou conhecida como Método Variacional Tridimensional (3DVAR). A seguir, são relatados alguns resultados obtidos com os métodos variacionais nas últimas décadas.

Lorenc (1986), analisando aspectos probabilísticos da assimilação variacional, proposta por Sasaki (1958), concluiu que, como a função de densidade de probabilidade do erro de *background* e a função dos erros de observação são gaussianas, logo, com base na teoria das probabilidades de Bayes, a função custo deveria ser um funcional quadrático.

A função custo descrita por Lorenc (1986), com base na teoria de probabilidades bayesiana, é dada por

$$J(x) = \frac{1}{2}(x - x_b)^T B^{-1}(x - x_b) + \frac{1}{2}(y_0 - H(x))^T R^{-1}(y_0 - H(x)) \text{ ,}$$

onde x é a observação, $x_b x_b$ é o campo de *background* (integração curta do modelo ou climatologia, que pode ser conotado como campo suporte), y_0 é a estimativa inicial, H é um operador que age sobre a dimensão da observação possibilitando a comparação desta com a estimativa inicial do modelo, B é a matriz de covariância dos erros de estimativa e R é a matriz de covariância dos erros de observação.

Definindo o mínimo de $J(x)$ como $x = x_a$, tem-se que $\nabla_x J(x_a) = 0$ é uma solução exata para o problema de minimização variacional tridimensional. Pode-se expressar a solução em termos de x_a, resultando em $x_a = x_b + (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} (y_0 - H(x_b))$ (LORENC, 1986).

A solução apresentada na equação acima não é utilizada computacionalmente como método para minimizar a função custo para casos reais. A seguir, é apresentado o procedimento que constitui a solução numérica do problema variacional 3DVAR:

1) Calcula-se $J(x)$, utilizando $x = x_b$ como chute inicial.

2) Calcula-se $\nabla J(x)$.

3) Utiliza-se uma sub-rotina de otimização - método do gradiente conjugado, por exemplo (Hoffman, 1992) - para determinar a direção $f(\nabla J(x))$ ótima para minimização.

4) Calcula-se $x^{n+1} = x^n + \alpha f(\nabla J(x))$ onde n é o número da iteração e α é um coeficiente que determina o número de passos para a análise ótima.

5) Verifica-se a convergência de x^{n+1}. Se não houver convergência, retorna-se ao passo 1. Se houver, a solução encontrada na convergência é a solução ótima.

Andersson *et al.* (1995/1996) apresentaram as características principais do sistema 3DVAR. Ele começou a ser implementado, a partir de 1996, no *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF), substituindo um sistema baseado em IO, o qual era utilizado operacionalmente desde 1979.

Andersson *et al.* (1998) apresentaram resultados de experimentos, concluindo que o método 3DVAR produziu impacto positivo na previsão de vento e temperatura na troposfera extratropical do Hemisfério Norte (HN), e na análise do campo de vento na superfície do oceano; particularmente na vizinhança de tempestades tropicais.

Barker *et al.* (2004) implementaram o método 3DVAR no modelo MM5, relatando melhora significativa na previsão da magnitude do vento, e uma pequena melhora na previsão de temperatura e umidade relativa.

Ao longo dos anos, surgiram versões híbridas do 3DVAR com outros métodos, exemplo disto é o *Physical-space Statistical Analysis System* (PSAS). Conforme descrito por Cohn *et al.* (1997), o PSAS é um sistema de assimilação de dados desenvolvido pela Divisão de Assimilação de Dados do Centro de Vôos Espaciais *Goddard*, da agência norte-americana *National Aeronautics and Space Administration* (NASA).

Segundo Moura *et al.* (2010), o PSAS é uma combinação de IO e 3DVAR. Este sistema é utilizado operacionalmente no *National Center for Environmental Prediction / National Oceanic and Atmospheric Administration* (NCEP/NOOA), diferindo dos sistemas de análise variacionais convencionais, pelo fato de utilizar o espaço físico ao invés do espaço espectral na sua integração. Courtier (1997) demonstrou que o PSAS e o 3DVAR são algebricamente equivalentes.

Moura *et al.* (2010) avaliaram as previsões de precipitação e pressão reduzida ao nível médio do mar, utilizando o modelo de previsão do tempo ETA, com duas entradas distintas de dados: a análise do PSAS do CPTEC/INPE e a análise do sistema operacional do NCEP, com tempo de integração de 120 horas. Foram analisados o Erro Médio (EM) e o Erro Médio Quadrático (EMQ) para o período de dezembro de 2007 a fevereiro de 2008. Segundo os autores, as duas análises tenderam a superestimar a precipitação sobre a Região Norte do Brasil. Foi observada uma melhora significativa na análise da pressão reduzida ao nível médio do mar da análise gerada pelo PSAS implementado no CPTEC/INPE, em relação à análise do NCEP. Posteriormente, o PSAS foi acoplado ao modelo de circulação geral da atmosfera do CPTEC/INPE, gerando o sistema que passou a ser denominado *Global Physical-space Statistical Analysis System* (GPSAS). No trabalho de Azevedo *et al.* (2011), os autores concluíram que existe uma forte relação entre o número de dados assimilados e a melhora na qualidade das análises no período compreendido entre 2007 e 2010, sendo

Anuário do Instituto de Geociências - UFRJ
ISSN 0101-9759 e-ISSN 1982-3908 - Vol. 39 - 2 / 2016 p. 133-144

que os maiores impactos foram devido à inclusão de dados de satélites do Hemisfério Sul (HS).

Rabier & Courtier (1992) apresentaram as principais características do Método Variacional Quadridimensional (4DVAR), que vem a ser uma versão do método 3DVAR aplicado a uma janela de assimilação, isto é, para o intervalo de tempo decorrido entre duas análises, subdividido em vários subintervalos. Na versão inicial deste método, era exigido que o modelo deveria ter alto grau de precisão em toda janela de assimilação, atribuindo maior peso ao modelo. Este problema, no entanto, foi resolvido por Trémolet & Fischer (2010), que propuseram uma variante do 4DVAR implementado no sistema previsor do ECMWF. No método descrito por estes autores, pode-se dispensar a forte condição, exigida desde a primeira implementação do 4DVAR em 1997, de que o modelo deve ter alto grau de precisão em toda janela de assimilação. Esta condição foi substituída pela condição de que o modelo deve ser preciso apenas em cada subintervalo da janela. Por isto tal versão do 4DVAR ficou conhecida como *Weak Constraint* 4DVAR (WC-4DVAR).

O método 4DVAR é uma extensão do 3DVAR que inclui a dimensão tempo na assimilação de dados. Segundo Fischer (2001), as principais diferenças entre os sistemas 3DVAR e 4DVAR são:

1) 4DVAR inclui integração de um Modelo Adjunto (MA) e do Modelo Tangente Linear (MTL) durante a minimização.

2) No 4DVAR, realiza-se duas atualizações incrementais: uma a cada análise e uma a cada subintervalo. Por exemplo, um tempo de análise de 6 horas pode ser dividido em subintervalos de 30 minutos ou 1 hora, com assimilação 4DVAR acontecendo em cada subintervalo.

3) No sistema 3DVAR, todas as observações para a janela de assimilação centradas no tempo, são coletadas ao mesmo tempo e são comparadas com as trajetórias até o tempo da análise. No sistema 4DVAR, as observações são divididas em subintervalos e comparadas com as estimativas, de modo que δx_n é atualizado a cada subintervalo, e portanto, é mais preciso - teoricamente - do que o δx_n calculado através do 3DVAR.

3.7 Comparações entre Métodos

A discussão sobre quais das metodologias é mais eficiente para o procedimento de assimilação de dados - filtragem de Kalman *versus* métodos variacionais - é um debate recorrente entre pesquisadores. Como consequência há uma rica literatura comparando estas duas abordagens.

Rabier *et al.* (1998), ao comparar o 4DVAR com o 3DVAR para ciclogêneses rápidas, concluíram que o 4DVAR foi mais eficiente.

Caya *et al.* (2005), utilizando dados sintéticos, compararam o FKEns e o 4DVAR para assimilação de dados de radar em um modelo de circulação geral da atmosfera, concluindo que houve maior impacto do método 4DVAR na previsão das componentes do vento, e maior impacto do FKEns na previsão de precipitação.

Meng & Zhang (2008), com o objetivo de comparar o FKEns com o método 3DVAR para o modelo WRF, assimilaram dados de pressão e perfis verticais de vento através dos dois métodos, constatando maior impacto do FKEns. Um aspecto interessante neste trabalho é que o *ensemble* utilizado no experimento foi constituído por previsões geradas por diferentes configurações de parametrizações físicas.

Zhang *et al.* (2011) compararam os métodos FKEns, 3DVAR e 4DVAR aplicados a um modelo de área limitada. Os autores relataram menor erro de previsão dos campos de temperatura e vento para 12, 24 e 36 horas do FKEns e 4DVAR, ressaltando que o FKEns foi mais preciso com o aumento do horizonte de previsão para 48 e 72 horas.

3.8 Métodos Híbridos

Os métodos híbridos constituem uma alternativa na solução do problema de assimilação para uma grande dimensão espacial.

Hamill & Snyder (2000) desenvolveram uma forma híbrida entre o 3DVAR e o FKEns, onde a matriz de covariância dos erros de estimativa é obtida através da combinação linear convexa das matrizes de covariância dos erros calculadas com o método 3DVAR e com o FKEns. Os autores concluíram que as estimativas mais precisas para a maioria das variáveis foram obtidas com maior peso atribuído ao FKEns.

Hansen & Smith (2001) propuseram uma análise baseada na integração do 4DVAR e do FKEns paralelamente, onde a matriz de covariância do erro de estimativa do FKEns foi utilizada na minimização da função custo do 4DVAR, constatando-se redução do erro de estimativa do modelo utilizado com assimilação.

Wang *et al.* (2008) propuseram um método híbrido, utilizando o FKTEns e o 3DVAR. Neste método, as matrizes de covariância dos erros, geradas pelos *ensembles* do FKEns, são utilizadas na minimização variacional. Os autores concluíram que este método híbrido gerou resultados na previsão de campos de temperatura e vento mais precisos do que os obtidos anteriormente utilizando apenas o 3DVAR.

3.9 Dados de Radar e Satélite

Mesmo com o grande avanço dos métodos de assimilação, ainda existem muitas dificuldades na assimilação de dados meteorológicos. Uma alternativa para melhorar a representação dos fenômenos de escala subsinótica é assimilar dados de radar. Snyder & Zhang (2003) utilizaram o FKEns para assimilar dados sintéticos de radar em um modelo não-hidrostático. Os resultados indicaram que o FKEns conseguiu controlar as não-linearidades da dinâmica do sistema. Dowell *et al.* (2004), com base no trabalho de Snyder & Zhang (2003), testaram a assimilação de dados reais de radar, obtendo melhora na previsão das variáveis analisadas.

Sugimoto *et al.* (2009) assimilaram dados de radar utilizando o modelo WRF com Assimilação de Dados 3DVAR (WRF-3DVAR), obtendo melhora na previsão de curto prazo da refletividade e velocidade radial do vento, importantes para a análise do campo convectivo, e por consequência, para a previsão de precipitação. Rakesh *et al.* (2009), avaliando o impacto do método 3DVAR na assimilação de dados de satélite utilizando os modelos WRF e MM5 sobre a Índia, observaram impacto semelhante nos dois modelos, com melhora na CI para os campos de vento, temperatura e umidade. O método 3DVAR foi utilizado no modelo MM5 por Silva *et al.* (2012) para inferir a refletividade de um radar Doppler, constatando-se maior precisão do sistema com assimilação de dados.

3.10 WRF-3DVAR

O WRF é um modelo de PNT que possui uma ampla comunidade internacional de usuários, entre outros motivos, por ter o núcleo e o sistema de assimilação de dados desenvolvidos para diferentes plataformas, diretivas de paralelismo e compiladores. Por conseguinte, à medida que a assimilação de dados se torna uma linha de pesquisa cada vez mais importante para o aperfeiçoamento da PNT, mais enriquecida fica a bibliografia sobre este tema.

Os principais trabalhos sobre assimilação de dados meteorológicos com o WRF são de Barker *et al.* (2012) e Huang *et al.* (2009). Vale citar também o trabalho de Routray *et al.* (2010), que investiga o impacto da assimilação através do método 3DVAR aplicado ao modelo WRF para eventos de precipitação intensa ocorridos na região das monções indianas. Os autores relatam que o WRF-3DVAR foi eficiente na reprodução da localização e na quantidade de precipitação.

4 Conclusão

Ressalta-se que o surgimento dos métodos híbridos *ensemble*/variacionais, a assimilação direta de radiâncias de satélite e a assimilação de dados de radar são os maiores avanços na área nos últimos anos. A implementação de métodos de assimilação de dados de radar deve ser o maior desafio dos próximos anos para os desenvolvedores de modelos numéricos de previsão do tempo. Concluí-se que os métodos variacionais e a filtragem de Kalman constituem o estado da arte da assimilação de dados atualmente.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem à agência de fomento à pesquisa CAPES, pelo financiamento do projeto no qual este trabalho está incluído.

6 Referências

Andersson, E.; Courtier, P.; Gaffard, C.; Haseler, J.; Rabier, F.; Undén, P. & Vasiljevic, D. 1995/1996. 3D-Var the new operational analysis scheme. *ECMWF Newsletter*, *71*: 2-5.

Andersson, E.; Haseler, J.; Undén, P.; Courtier, P.; Kelly, G.; Vasiljevic, D.; Brankovic, C.; Cardinali, C.; Gaffard, C.; Hollingsworth, A.; Jakob, C.; Janssen, P.; Klinker, E.; Lanzinger, A.; Miller, M.; Rabier, F.; Simmons, A.; Strauss, B.; Thépaut, J-N. & Viterbo, P. 1998. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). Part III: Experimental results. *ECMWF Newsletter*, *81*: 9.

Anderson, J.L. 2001. An ensemble adjustment Kalman Filter for data assimilation. *Mon. Weather Rev.*, 129(12): 2884-2903.

Aravéquia, J.A.; Medeiros, M.D.S.; Souza, S.S. & Herdies, D.L. 2010. O uso da assimilação de dados LETKF como ferramenta de auxílio à previsão do tempo. *In:* Congresso Brasileiro de Meteorologia, 16, Belém, 2010. Disponível em: <http://www.cbmet2010.com>. Acesso em: 29 Mar. 2012.

Azevedo, H.B.; Gonçalves, L.G. & Sapucci, L.F. 2011. Avaliação Preliminar do Desempenho da Versão Global do Sistema de Assimilação PSAS do CPTEC/INPE Segundo as Métricas da OMM. *In:* Encontro Sul-brasileiro de Meteorologia, 4, Pelotas, 2011. Disponível em: <http://wp.ufpel.edu.br/meteoro/files/2011/05/helena_barbieri_1.pdf>. Acesso em: 09 Mar. 2012.

Barker, D.M.; Huang, W.; GUO Y.-R.; & Xiao, Q.N. 2004. A Three-Dimension (3DVAR) Data Assimilation System For Use Withmm5: Implementation and Initial Results. *Mon. Weather Rev.*, *132*: 897-914.

Barker, D.M.; Huang, W.; Liu, Z.; Auligné, T.; Zhang, X.; Rugg, S.; Ajjaji, R.; Bourgeois, A.; Bray, J.; Chen, Y.; Demirtas, M.; Guo, Y.-R.; Henderson, T.; Huang, W.; Lin, H.-C.; Michalakes, J.; Rizvi, S.; & Zhang, X. 2012. The weather Research and Forecasting Model's Community Variational/Ensemble Data Assimilation System: WRFDA. *Bulletin of American Meteorological Society*, *93*: 831-843.

Barnes, S.L. 1964. A techniques for maximizing details in numerical map analysis. *J. Appl. Meteorol.*, *3*(4): 395-409.

Barnes, S.L. 1978. Oklahoma thunderstorms on 29-30 April 1970, Part I: Morphology of a tornadic storm. *Mon. Weather Rev.*, *106*(5): 673-684.

Bjerknes, V. 1911. *Dynamical meteorological and hidrography*. New York: Carnegie Institute, Gibson Bros. 176p.

Bergthórsson, P. & DÖÖS, B.R. 1955. Numerical weather map analysis. *Tellus*, 7(3): 329-340.

Bishop, C.H., Etherton, B.J.; Majundar, S.J. 2001. Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I: Theoretical aspects. *Mon. Weather Rev.*, 129 (3): 420-436.

Caya, A.; Sun, J. & Snyder, C. 2005. A comparison between the 4DVAR and the ensemble Kalman filter techniques for radar data assimilation. *Mon. Weather Rev.*, *133*(11) 3081-3094.

Cohn, S.E.; Silva, A.; Guo, J.; Sienkiewics, M. & Lamich, David. 1997. Assessing Effects of Data Selection with DAO Physical-Space Statistical Analysis System. *Office Note Series on Global Modeling and Data Assimilation*, DAO Office Note 97-08, Maryland, 1997. Disponível em: <http://gmao.gsfc.nasa.gov/pubs/docs/Cohn207.pdf>. Acesso em 15 Out. 2011. 22p.

Courtier, P. 1997. Dual Formulation of four-dimensional Variational Assimilation. Quarterly *Journal of the Royal Meteorological Society*, *123*(B)(544): 2449- 2461.

Cressman, G.P. 1959. An operational objective analysis system. *Mon. Weather Rev.*, *87*(10): 367-374.

Dowell, D.C.; Zhang, F.; Wicker, L.J.; Snyder, C. & Crook, N.A. 2004. Wind and temperature retrievals in the 17 May 1981 Arcadia, Oklahoma, supercell: Ensemble Kalman filter experiments. *Mon. Weather Rev.*, *132*(8): 1982-2005.

Eliassen, A. & Bessemoulin, J. 1960. *Upper air network requirements for numerical weather prediction*. Geneva: World Meteorological Organization, 1960. 105p.

Evensen, G. 1994a. Sequential data assimilation with a nonlinear quasigeostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophy. Res.*, *99*(C5): 10143-10162.

Evensen, G. 1994b. Inverse Methods and data assimilation in nonlinear ocean models. *Physica D*, *77*(1-3): 108-129.

Evensen, G. 1997. Advanced data assimilation for strongly nonlinear dynamics. *Mon. Weather Rev.*, 125(6): 1342-1354.

Fischer, M. 2001. Assimilation techniques (4): 4d-Var. *Meteorological Training Course Lecture Series*, 2001. Disponível em: <http://www.ecmwf.int/newsevents/training/lecture_notes/pdf_files/ASSIM/4dVar.pdf>. Acesso em: 15 Out. 2011.

Gandin, L.S. 1963. *Objective analysis of meteorological fields*. Tradução inglesa feita por Staff Ipst em 1965 do livro russo: Gidrometeorologicheskoe Izdatelstvo, Leningrado. 242 p.

Gilchrist, B. & Cressman, G.P. 1954. An experiment in objective analysis. *Tellus*, 6(4): 309-318.

Gonçalves, D.J. 2005. *Aspectos matemáticos do Filtro de Kalman Discreto.* Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Dissertação de Mestrado, 54p.

Gonçalves, L.G.G. & Innocentini, V. 1999. Uso da técnica de Relação de Newton para assimilação de dados de satélite em um modelo de área de limitada. *Revista Brasileira de Geofísica*, *17*(2-3): 219-219.

Hamill, T.M. & Snyder, C. 2000. A hybrid ensemble Kalman filter - 3D variational analysis scheme. *Mon. Weather Rev.*, 128(8): 2905-2919.

Hansen, J.A. & Smith, L.A. 2001. Probabilistic noise reduction. *Tellus*, *53*(5): 585-598.

Härter, F.P. 2007. *Redes Neurais Recorrentes Aplicadas à Assimilação de Dados em Dinâmica Não-linear***.** Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Tese de Doutorado 138p.

Härter, F.P. & Campos Velho, H.F. 2008. New Approach to Applying Neural Network in Nonlinear Dynamic Model. *Appl. Math. Model.*, *32*(12): 2621-2633.

Hoffman, J.D. 1992. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill Book, 825p.

Hoke, J.E. & Anthes, R.A. 1976. The initialization of numerical models by a dynamic relaxation technique. *Mon. Weather Rev.*, 104(12): 1551-1556.

Huang, X.-Y.; Xiao, Q.; Barker, D.M.; Zhang, X.; Michalakes, J.; Huang, W.; Henderson, T.; Bray, J.; Chen, Y.; Ma, Z.; Dudhia, J.; Guo, Y.; Zhang, X.; Won, D.-J.; Lin, H.-C. & Kuo, Y.H. 2009. Four-Dimensional Variational Data Assimilation for WRF: Formulation and Preliminary Results. *Mon. Weather Rev.*, *137*: 299-314.

Kalman, R.E. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal Basic Engineering* , *82D*: 35-45.

Kalnay, E. 2003. *Atmospheric modeling, data assimilation* *and predictability*. Cambridge University Press, Cambridge. 341p.

Kistler, R.E. 1974. *A study of data assimilation techniques in an autobarotropic primitive equation channel model*. 1974. Departamento de Meteorologia, Penn State University, Master Dissertação de Mestrado, 84p.

Kivman, G.A. 2003. Sequential parameter estimation for stochastic systems. *Nonlinear Processes in Geophysics*, *10*(3): 253-259.

Lorenc, A.C. 1986. Analysis methods for numerical weather prediction. *Quarterly Journal of Royal Meteorology Society*, *112*(474): 1177-1194.

Lorenz, E. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 (2): 130–141.

Medeiros, M.D.S; Aravéquia, J.A.; Herdies, D.L. & Souza, S.S. 2010. Avaliação da temperatura do ar obtida com o LETKF após a inclusão de radiâncias de satélite. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE METEOROLOGIA, 16, Belém, *Resumos Expandidos*.

Meng, Z. & Zhang, F. 2008. Tests of an ensemble Kalman filter for Mesoscale and regional-scale data assimilation. Part III: Comparison with 3DVAR in a real-data case study. *Mon. Weather Rev.*, *136*: 522-540.

Moura, R.G; Herdies, D.L.; Mendes, D. & Mendes, M.C.D. 2010. Avaliação do Modelo Regional ETA utilizando as análises do CPTEC e NCEP. *Revista Brasileira de Meteorologia*, *25*(1): 46-53.

Ott, E.; Hunt, B.; Szunyogh, I.; Zimin, A.; Kostelich, E.; Corazza, M.; Kalnay, E. & Yorke, J. 2004. A local ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation. *Tellus*, *56A*: 415–428.

Panofsky, H. A. 1949. Objective weather-map analysis. *J. Appl. Meteorol.*, *6*(6): 386-392.

Pham, D.T. 2001. Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Mon. Weather Rev.*, 129(5): 1194-1207.

Rabier, F. & Courtier P. 1992. Four dimensional assimilation in the presence of baroclinic instability. *Quarterly Journal of Royal Meteorology Society*, *118*: 649-672.

Rabier, F.; Mahfouf, J-F.; Fischer, M.; Järvinen, H.; Simmons, A.; Bouttier, F.; Courtier, P.; Hamrud, M.; Haseler, J.; Hollingsworth, A.; Isaksen, L.; Klinker, E.; Saarinen, S; Temperton, C.; Thépaut, J-N.; Undén, P. & Vasiljévic. 1998. Recent experiments on 4D-Var and first results from a simplified Kalman Filter. *ECMWF Newsletter*, *81*: 8.

Rakesh, V.; Singh, R. & Joshi, P.C. 2009. Intercomparison of the performance ofmm5/WRF with and without data assimilation in short-range forecast applications over the Indian region. *Meteorol. Atmos. Phys*., *105*: 133-155.

Richardson, L. 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press. 250p.

Routray, A.; Mohanty, U.C.; Rizvi, S.R.H.; Niyogi, D.; Osuri, K.K. & Pradhan, D. 2010. Impact of Doppler weather radar data on numerical forecast of Indian monsoon depressions. *Quarterly Journal of Royal Meteorology Society*, 136: 1836-1850.

Sasaki, Y. 1958. An objective analysis based on the variational method. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 36 (3): 77-88.

Silva, G.L.; Silva, A.S. & Yamasaki, Y. 2012. Validação da assimilação de dados na inferência da refletividade de um de um radar com o sistemamm5. *Revista Brasileira de Meteorologia*, 27(1): 75-84.

Snedecor, G.W. & Cochran, W.G. 1971. *Statistical Methods*, Sixth Edition. The Iowa State University Press. Ames. 593p.

Snyder, C.; Zhang, F. 2003. Assimilation of simulated Doppler radar observations with ensemble Kalman filter. *Mon. Weather Rev.*, *131*(8): 1663-1677.

Sorenson, H. Julho de 1970. Least-Squares Estimation: from Gauss to Kalman. *IEEE Spectrum*, p. 63-68.

Stauffer, D.R.; Seaman, N.L. 1990. Use of 4-D data assimilation in a limited area Mesoscale model. Part1: Experiments with synoptic scale data. *Mon. Weather Rev*., *118*(6): 1250-1277.

Sugimoto, S.; Crook, N.A.; Sun, J.; Xiao, Q. & Barker, D.M. 2009. An examination of WRF 3DVAR radar data assimilation on its Capability in retrieving unobserved variables and forecasting precipitation through observing system simulation experiments. *Mon. Weather Rev.*, *137*: 4011-4029.

Takemasa, M. & KUNII, M. 2012. The Local Ensemble Kalman Filter with the Weather Research and Forecasting Modelo: Experiments with Real Observations. *Pure Appl. Geophy*., *169*: 321-333.

Trémolet, Y. & Fischer, M. 2010. Weak constraint 4D-Var. *ECMWF Newsletter*, *125*: 12-16, 2010.

Wang, X.; Barker, D.M.; Snyder, C.; Hamill, T.M. 2008. A hybrid ETKF-3DVAR data assimilation scheme for the WRF model. Part I: observing system simulation experiment. *Mon. Weather Rev.*, *136*: 5116-5131.

Zhang, M.; Zhang, F.; Huang, X.-Y. & Zhang, X. 2011. Intercomparison of an Ensemble Kalman Filter with Three- and Four- Dimension Variational Data Assimilation Methods in a Limited-Area Model over the Month of June 2003. *Mon. Weather Rev.*, *139*: 566-572.