

*[Signature]*  
Prof. Enilson Palmeira Cavalcanti  
DCA - CCT - UFPE.

Basilio de Bragança Pereira  
B.Sc., M.Sc., DIC, Ph.D., FSS  
IM e COPPE/UFRI

Maria Bernadette Zanusso Pais  
B.Sc., M.Sc.  
DM/UFMS

Paulo Roberto de Holanda Sales  
B.Sc., Eng., M.Sc.  
ELETROBRÁS, UERJ e COPPE/UFRI

UFPE / BIBLIOTECA / PHAI  
DOAÇÃO  
ELETROBRÁS

# ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS

Uma introdução para  
Engenharia, Economia e Estatística

Obra publicada com a colaboração do Programa  
de Desenvolvimento Tecnológico da CENTRAIS  
ELÉTRICAS BRASILEIRAS S/A. - ELETROBRÁS

1986

Eletrabras



Arte final  
Leitura em editoração

*Exercício de Ferrer*  
*12/05/02*  
*Santho (Rdt)*  
*Cópia de arquivo*

*FB*  
*FI*  
*2019.2*  
*51362*  
*15/04/21*  
*To*



$D_t$  - vetor  $m \times 1$  de variáveis exógenas.

$\epsilon_t$  - vetor  $q \times 1$  de ruído branco com matriz de covariância  $\Sigma$ .

Seja  $T$  o tamanho da amostra e, escrevendo,  $X = (X(1), \dots, X(T))$  tem-se,

$$XT + DB = E.$$

Estas equações são chamadas estruturais.

Se  $\Gamma$  tem posto máximo, as equações,

$$-X = DT + W = DB\Gamma^{-1} = E\Gamma^{-1}$$

são chamadas de forma reduzida do modelo.

O modelo dinâmico de equações simultâneas é

$$\Gamma'(B)X_t + B'(B)D_t = \epsilon_t$$

onde,  $\Gamma'(B)$  e  $B'(B)$  são polinômios matriciais em  $B$ .

Observe-se que todos os modelos anteriores podem ser estendidos para o caso multivariado, bastando considerar as variáveis  $X_t$  como vetores e os polinômios em  $B$  como polinômios matriciais.

## CAPÍTULO II

# ANÁLISE ESPECTRAL UNIVARIADA

## 2.0. INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se uma introdução à análise de séries temporais estacionárias no domínio da frequência. Estuda-se a decomposição da série temporal em partes associadas a frequências de ocorrência de alguns eventos em lugar da amplitude dos eventos, isto é, em suas componentes cíclicas. Define-se, também, o espectro, que é a ferramenta natural para a análise de um processo estacionário do domínio da frequência. O espectro é uma função que complementa, para um processo estacionário, o estudo feito no domínio do tempo através da função de autocorrelação.

## 2.1. ANÁLISE DE FOURIER

A análise de Fourier estuda, basicamente, a aproximação de qualquer função por uma soma de senos e cossenos.

Pelo teorema de Fourier, qualquer função  $f(x)$ , periódica do período  $P$ , pode ser escrita como uma série de Fourier na forma,

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{P} x\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi j}{P} x\right) \right\} \quad (1)$$

onde  $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  são constantes que podem ser determinadas a partir de  $f(x)$ .



Para uma função  $f(x)$ , não periódica, pode-se considerá-la como uma função periódica de período infinito.

Neste caso, a distância entre as frequências  $2\pi/p$  e  $2\pi(i+1)/p$  dos termos consecutivos em (1) tende a zero. Então, por operações de limite, o somatório torna-se uma integral. Deste modo as funções não periódicas poderiam ser escritas como

$$f(x) = \int_0^{\infty} (g(w)\cos wx + k(w)\sin wx) dw$$

onde  $g(w)$  e  $k(w)$  são determinadas a partir de  $f(x)$ .

Entretanto, para que as operações de limite sejam válidas, a função  $f(x)$  deve satisfazer as seguintes condições:

(i) ser absolutamente integrável, isto é,

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty;$$

(ii) ter um número finito de descontinuidades;

(iii) possuir um número finito de máximos e mínimos.

Mostra-se que a série de Fourier, para uma série temporal discreta,  $X(t)$ , emerge naturalmente. Inicialmente, considerará-se um modelo senoidal simples, do qual algumas definições básicas serão extraídas.

## 2.2. MODELO SENOIDAL SIMPLES

Considere a Figura 2.1. Os valores da série  $x(1), x(2), x(3), \dots$  variam em torno do valor médio  $\mu$  e, ainda, as variações se repetem, isto é, a série é periódica.

A série temporal na Figura 2.1 pode ser descrita por quatro elementos básicos que são: período, frequência, amplitude e fase, que são adotados por  $p, f, A$  e  $\theta$ , respectivamente.

$p$ : é o período de tempo necessário para a série temporal se repetir. O período é medido em unidade de tempo por ciclo e não é único, pois se a série tem período  $p$ , terá também período  $2p, 3p, 4p, \dots$ . Em geral a série é periódica se

$$X(t) = X(t+cp) \quad c = 1, 2, \dots$$

$f = 1/p$ : é o recíproco do período e fornece o número de repetições do ciclo por unidade de tempo. Por exemplo, com 12 meses por ciclo ( $p = 12$ ), a frequência é  $1/12$  ciclos por mês.

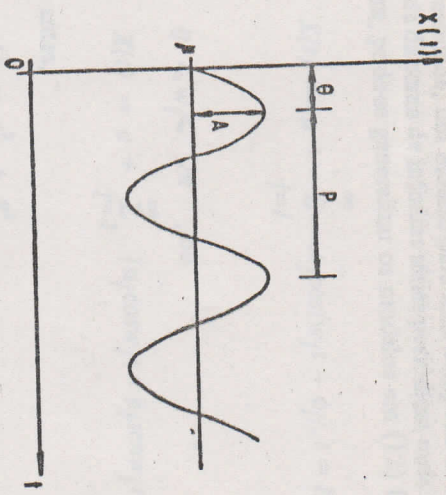


Figura 2.1. Série temporal periódica.

$A$ : A amplitude é a distância da média da série ao pico ou ao "fundo do vale".

$\theta$ : A fase é a distância entre a origem da série temporal, no caso  $t = 0$ , e o pico (ou fundo do vale) mais próximo.

Para a série constante,  $X(t) = k$ , considera-se  $p = \infty$  e  $f = 0$ .

Portanto, a série temporal periódica e estacionária  $X(t)$  pode ser expressa na forma

$$X(t) = \mu + A \cos(2\pi f t - \theta), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

que é conhecida como representação harmônica. Por exemplo, quando  $t = \theta$ ,  $X(t) = \mu + A$ .

As vezes é conveniente expressar a função periódica em termos da frequência angular. A frequência angular é medida em termos de radianos por unidade de tempo,

$$\omega = 2\pi f, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

Portanto pode-se reescrever o modelo (3) como,

$$X(t) = \mu + A \cos(\omega t - \phi), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4)$$

onde,

$$\phi = 2\pi f \theta$$

Esta será a representação fundamental e usar-se-á os termos frequência para  $f$ , frequência angular para  $\omega$  e fase para  $\phi$ .

Da identidade trigonométrica,

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (5)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t - \phi) &= A [\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi] \\ &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \end{aligned} \quad (6)$$



onde,

$$\alpha = A \cos \phi \tag{7}$$

$$\beta = A \sin \phi \tag{8}$$

Então, (3) pode também ser escrito como,

$$X(t) = \mu + a \cos wt + \beta \sin wt, \quad t = 1, 2, \dots, T \tag{9}$$

A partir das identidades trigonométricas,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

e,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ e } \arctan x = \tan^{-1} x$$

tem-se,

$$\alpha^2 + \beta^2 = A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 \tag{10}$$

e,

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ou,

$$\arctan \frac{\beta}{\alpha} = \phi \tag{11}$$

O modelo anterior é um modelo simples, mas na prática as mudanças em uma série temporal podem ser causadas por variações em diferentes frequências. Por exemplo, séries de vendas podem conter variações cíclicas semanais, mensais, anuais e outras. Em outras palavras, os dados podem conter variações em altas, médias e baixas frequências.

Então, uma generalização natural é dada por:

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^k A_j \cos(w_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \tag{12a}$$

ou,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^k (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t), \quad t = 1, 2, \dots, T \tag{12b}$$

que representa um processo harmônico simples.

Note-se que nos modelos (4) e (12a) se  $A, \phi, A_j$  e  $\phi_j$  são constantes fixas, o processo  $X(t)$  não é estacionário pois  $E[X(t)]$  varia com o tempo. Para aplicar a teoria dos processos estacionários supõe-se que  $A$  e  $A_j$  são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero ou, de maneira equivalente, que  $\phi$  e  $\phi_j$  são variáveis aleatórias com distribuição uniforme em  $[0, 2\pi]$ , que são fixas para uma única realização do processo. Da mesma forma, para o processo em (12b) ser estacionário deve-se considerar os  $\alpha_j$  e  $\beta_j, j = 1, \dots, k$  variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero.

Entretanto, pode-se perguntar: por que deve haver somente um número finito  $k$  de frequências envolvidas no modelo para  $X(t)$ ?

Na realidade, um modelo para série temporal estacionária estabelece que ela é composta da soma de infinitas séries periódicas mais uma média.

Assim, pode-se generalizar os modelos em (12) fazendo  $k \rightarrow \infty$  para se obter,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(w_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots \tag{13a}$$

com

$$0 \leq w_j \leq 2\pi, \text{ ou}$$

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t), \quad t = 1, 2, \dots \tag{13b}$$

Como antes,

$$A_j^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2$$

e,

$$\phi_j = \arctan \frac{\beta_j}{\alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{14b}$$

Teoricamente pode-se mostrar que qualquer série temporal estacionária pode ser aproximada por uma série infinita de curvas senos e cossenos.

### 2.3. SÉRIE DE FOURIER E A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO

Considere-se que a série é representada pelo modelo das equações (13). Cada componente é uma função periódica e cada uma pode ser identificada com sua frequência angular  $w_j$ . Isto é, uma série temporal observada terá comprimento finito e não se pode estimar, a partir dela, o número infinito de parâmetros das equações (13).

Dados  $T$  observações da série,  $\{x(1), x(2), \dots, x(T)\}$ , pode-se estimar, no máximo  $T$  parâmetros para, digamos, a equação (13a).

Entretanto, antes de formular o modelo com um número finito de componentes, é preciso mencionar dois pontos:

- 1) Com unidade de tempo constante, por exemplo, mês, com exceção da média, que tem período infinito, a maior curva senóide periódica (a mais lenta) que pode ser observada é aquela com um período de  $T$  meses, ou de frequência angular  $2\pi/T$ . Isto ocorre porque esta onda pode repetir-se somente uma vez em  $T$  observações se ela tem período  $T$ .

A menor curva senóide periódica (a mais veloz) que pode ser observada é aquela com um período de dois meses, desde que é necessário pelo menos dois meses para uma curva senóide completar um ciclo. Assim, a curva mais veloz que pode ser observada tem frequência angular  $2\pi/2 = \pi$  radianos por mês. Esta frequência é a mais alta e é denominada *frequência Nyquist*.

Estas curvas estão representadas na Figura 2.2.

- 2) Suponha que  $T$  é um número par, isto é,  $T = 2n$ . Então, a frequência angular da  $j$ -ésima onda é:



$$\omega_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Quando,

$j = 1, \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  que é a onda mais "vagarosa" que pode ser observada;

$j = n, \omega_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi$  que é a onda mais "veloz" que pode ser observada;

$j = 0, \omega_0 = 0$ , é a onda de frequência zero que representa o valor médio.

Desde que  $\text{sen}\omega_j t = 0$  e  $\text{cos}\omega_j t = 1$  o valor médio  $\mu = \alpha_0 \text{cos}\omega_j t = \alpha_0$  fica identificado com a amplitude da onda senóide associada com a frequência angular  $\omega_0$ .

Tendo em vista o exposto acima, pode-se escrever uma analogia finita das equações (13a) e (13b) como,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n A_j \text{cos}(\omega_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (15a)$$

e,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \text{cos}\omega_j t + \beta_j \text{sen}\omega_j t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (15b)$$

onde,

$$n = T/2$$

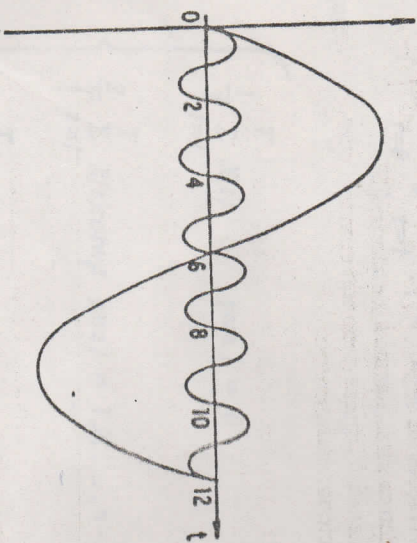


Figura 2.2. Curvas de frequência mais alta (Nyquist) e mais baixa.

Os parâmetros na equação (15a) são  $\mu$ ,  $A_j$  e  $\phi_j$  e na equação (15b) são  $\mu$ ,  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Esta última parece conter um parâmetro a mais que o número de observa-

ções. Entretanto, é fácil ver que de fato tem-se  $T$  parâmetros em vez de  $T+1$ .

Desde que  $\omega_n = \pi$ , a  $n$ -ésima componente na equação (15a) é dada por

$$A_n \text{cos}(\omega_n t - \phi_n) = \alpha_n \text{cos}\omega_n t + \beta_n \text{sen}\omega_n t = \alpha_n \text{cos}\omega_n t$$

pois,  $\text{sen}\omega_n t = \text{sen}\pi t = 0$ .

Logo,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \text{cos}(\omega_j t - \phi_j) + \alpha_n \text{cos}\omega_n t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

ou, ainda,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{cos}\omega_j t + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \text{sen}\omega_j t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

pois,  $\text{sen}\omega_n t = \text{sen}\pi t = 0$ .

Vê-se, assim, que existem  $T$  parâmetros para serem estimados a partir das  $T$  observações.

Por conveniência incluí-se a onda de frequência zero no somatório. Para isto define-se a fase  $\phi_0 = 0$ , então (15a) pode ser escrita como

$$X(t) = \sum_{j=0}^n A_j \text{cos}(\omega_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16a)$$

onde a média  $\mu$  é igual à amplitude  $A_0$ , da onda de frequência zero:  $\mu = A_0$ . Correspondente à equação (15b) tem-se,

$$X(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \text{cos}\omega_j t + \sum_{j=0}^n \beta_j \text{sen}\omega_j t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16b)$$

onde, novamente, o valor médio  $\mu = \alpha_0$

Lembrando que  $\text{sen}\omega_n t = 0$ , o último termo da equação (16b) é igual a zero.

As expressões dos estimadores dos parâmetros da equação (16b) podem ser obtidas multiplicando-se ambos os lados desta equação por  $\text{cos}\omega_j t$  (ou  $\text{sen}\omega_j t$ )

$$X(t) \text{cos}\omega_j t = \sum_{i=0}^n \alpha_i \text{cos}\omega_i t \text{cos}\omega_j t + \sum_{i=0}^n \beta_i \text{sen}\omega_i t \text{cos}\omega_j t$$

e, somando-se de  $1$  a  $T$ ,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{cos}\omega_j t = \sum_{i=0}^n \alpha_i \sum_{t=1}^T \text{cos}\omega_i t \text{cos}\omega_j t +$$



$$+ \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen} w_j \text{cos} w_j t$$

Lembrando as propriedades da ortogonalidade das funções seno e cosseno dadas por:

$$\sum_{t=1}^T \text{sen} w_j \text{sen} w_j t = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ T/2 & \text{se } i = j = 0, n \\ 0 & \text{se } i = j = 0, n \end{cases} \quad (17a)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{cos} w_j \text{cos} w_j t = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ T/2 & \text{se } i = j = 0, n \\ T & \text{se } i = j = 0, n \end{cases} \quad (17b)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen} w_j \text{cos} w_j t = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (17c)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen} w_j t = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (17d)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{cos} w_j t = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17e)$$

De (17c) tem-se que,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{cos} w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{t=1}^T \text{cos} w_j \text{cos} w_j t$$

e, com (17b), que:

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) & \text{para } j = 0 \\ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{cos} w_j t & \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{cos} w_j t & \text{para } j = n \end{cases} \quad (18a)$$

Ou, multiplicando-se (16b) por  $\text{sen} w_j t$  e somando-se de 1 a T, obtêm-se:

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{t=1}^T \text{cos} w_j \text{sen} w_j t + \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen} w_j \text{sen} w_j t$$

de (17c) vem,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen} w_j \text{sen} w_j t$$

e, com (17a),

$$\hat{\beta}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t & \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = 0 & \text{para } j = 0, n \end{cases} \quad (18b)$$

onde a frequência angular  $w_j = \frac{2\pi j}{T}$ .

Este procedimento não é nada mais do que formar as equações normais de mínimos quadrados. Assim as equações (18) fornecem, realmente, as estimativas de mínimos quadrados de um problema de regressão. Seja, então,

$$X = Z\Theta + \epsilon$$

onde,

$$X = (X(1), \dots, X(T))'$$

$$\Theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n)'$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \text{cos} w_1 & \text{sen} w_1 & \text{cos} w_2 & \text{sen} w_2 & \dots & \text{cos} w_{n-1} & \text{sen} w_{n-1} & 1 \\ 1 & \text{cos} w_{1,2} & \text{sen} w_{1,2} & \text{cos} w_{2,2} & \text{sen} w_{2,2} & \dots & \text{cos} w_{n-1,2} & \text{sen} w_{n-1,2} & -1 \\ 1 & \text{cos} w_{1,3} & \text{sen} w_{1,3} & \text{cos} w_{2,3} & \text{sen} w_{2,3} & \dots & \text{cos} w_{n-1,3} & \text{sen} w_{n-1,3} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \text{cos} w_1(T-1) & \text{sen} w_1(T-1) & \text{cos} w_2(T-1) & \text{sen} w_2(T-1) & \dots & \text{cos} w_{n-1}(T-1) & \text{sen} w_{n-1}(T-1) & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{com, } w_j = \frac{2\pi j}{T}$$

$$j = 1, \dots, n-1$$

Os estimadores de mínimos quadrados para  $A_j$  e  $\phi_j$  podem ser obtidos diretamente do relacionamento das equações (14). Assim,

$$\hat{A}_j = \sqrt{\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2} \quad (19a)$$

$$\hat{\phi}_j = \arctan \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\alpha}_j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (19b)$$

Nas equações (18) e (19) observa-se que:

$$1 - \text{Quando } j = 0, \hat{\alpha}_0 = \bar{X}$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t), \quad \hat{\beta}_0 = 0$$

pois  $\cos w_0 t = 1$  e  $\sin w_0 t = 0$ .

Portanto, os estimadores de mínimos quadrados da amplitude e da fase da onda de frequência zero são:

$$\hat{A}_0 = \hat{\alpha}_0 \text{ e } \hat{\phi}_0 = 0$$

2 - Quando  $j = n$ , tem-se:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (-1)^{t-1} X(t), \quad \hat{\beta}_n = 0$$

pois  $\cos w_n t = (-1)^{t-1}$  e  $\sin w_n t = 0$

E os estimadores de mínimos quadrados da amplitude e da fase da  $n$ -ésima onda de frequência são:

$$\hat{A}_n = \hat{\alpha}_n \text{ e } \hat{\phi}_n = 0$$

Removendo-se a média  $\mu$  do lado esquerdo de (16b) obtém-se:

$$X(t) - \mu = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j \cos w_j t + \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j \sin w_j t \quad (20)$$

onde, agora, os estimadores passam a ter as seguintes expressões:

$$\hat{\alpha}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \cos w_j t, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \cos w_j t, & j = n \end{cases} \quad (21a)$$

$$\hat{\beta}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \sin w_j t, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & j = n \end{cases} \quad (21b)$$

### Análise de Variância

Usando-se as relações de ortogonalidade mostra-se que:

$$SD^2 = \sum_{t=1}^T \frac{(X(t) - \bar{X})^2}{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2 \quad (22)$$

que é frequentemente conhecido como teorema de Parseval.

De fato,

$$X(t) - \bar{X} = \sum_{j=1}^n (\hat{\alpha}_j \cos w_j t + \hat{\beta}_j \sin w_j t)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (X(t) - \bar{X})^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha}_i \cos w_i t + \hat{\beta}_i \sin w_i t) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j \cos w_j t + \hat{\beta}_j \sin w_j t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \cos w_i t \cos w_j t + \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \cos w_i t \sin w_j t + \\ &\quad + \hat{\beta}_i \hat{\alpha}_j \sin w_i t \cos w_j t + \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \sin w_i t \sin w_j t) \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \sum_{t=1}^T \cos w_i t \cos w_j t + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \alpha_j \tilde{\beta}_j \sum_{t=1}^T \cos w_j t \sin w_j t + \beta_j \alpha_j \sum_{t=1}^T \sin w_j t \cos w_j t + \\
 & + \beta_j \tilde{\beta}_j \sum_{t=1}^T \sin w_j t \sin w_j t \quad (23)
 \end{aligned}$$

Logo, usando (17c), a segunda e a terceira parcelas em (23) desaparecem e como para  $i \neq j$  as outras parcelas se anulam resta para  $i = j = n$ . Vê-se, usando-se (17a), que a quarta parcela é nula e usando-se (17b), que a primeira parcela será  $T\alpha_n^2$ . Para  $i = j \neq n$ , usando-se (17a) e (17b) tem-se que a primeira mais a

quarta parcela é  $\frac{T}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^2 + \beta_j^2)$ .

Portanto,

$$\sum_{t=1}^T \frac{(X(t) - \bar{X})^2}{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^2 + \beta_j^2) + \alpha_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2$$

Agora, pelo fato que  $\hat{A}_0 = \bar{X} = \alpha_0$  pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T \frac{X^2(t)}{T} &= \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j^2 + \beta_j^2) + \alpha_n^2 = \\
 &= \hat{A}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2
 \end{aligned}$$

Aqui, a quantidade  $\sum_{t=1}^T X^2(t)/T$  é denominada *potência média* e as quanti-

dades  $\hat{A}_j^2/2$ ,  $\hat{A}_0^2$  e  $\hat{A}_n^2$  são denominadas *estimadores da potência média* na frequência angular correspondente.

Verificou-se, assim, que a variância total da série pode ser decomposta em uma combinação linear dos quadrados das amplitudes de cada componente periódica. Portanto, a análise de Fourier fornece nada mais do que uma análise de variância da série temporal amostral.

Na realidade, tem-se o modelo II da análise de variância, associado ao modelo linear,

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) + \epsilon_t$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são variáveis aleatórias.

É claro que deveria existir alguma relação entre as amplitudes das séries periódicas das quais  $X(t)$  é composta e a variância de  $X(t)$ , desde que quanto maior a amplitude das séries que compõe  $X(t)$ , maior será a flutuação de  $X(t)$ .

Nas ciências físicas as palavras *potência* e *variância* são usadas com o mesmo significado.

### Espectro de Linha

É o gráfico de  $\frac{1}{2} \hat{A}_j^2$ ,  $\hat{A}_n^2$  e  $\hat{A}_0^2$  contra a frequência  $f_j$ ,  $f_j = \frac{w_j}{2\pi}$

A figura 2.3 mostra o espectro de linha para uma série artificial  $X(t)$  e fornece uma análise visual da variância da série. Portanto, vê-se que a potência média da série  $X(t)$  pode ser explicada por quatro curvas senóides localizadas nas frequências 0,05; 0,10; 0,25 e 0,50.

Outros nomes também são utilizados, a saber *Periodograma*, para o gráfico de  $\hat{A}_j^2$  contra  $p_j$  (período); *Espectrograma*, para o gráfico de  $\hat{A}_j^2$  contra  $f_j$  (frequência). Box e Jenkins chamam de *períodograma* o gráfico de  $T\hat{A}_j^2/2$  contra  $f_j$  e  $T\hat{A}_j^2/2$  de intensidade.

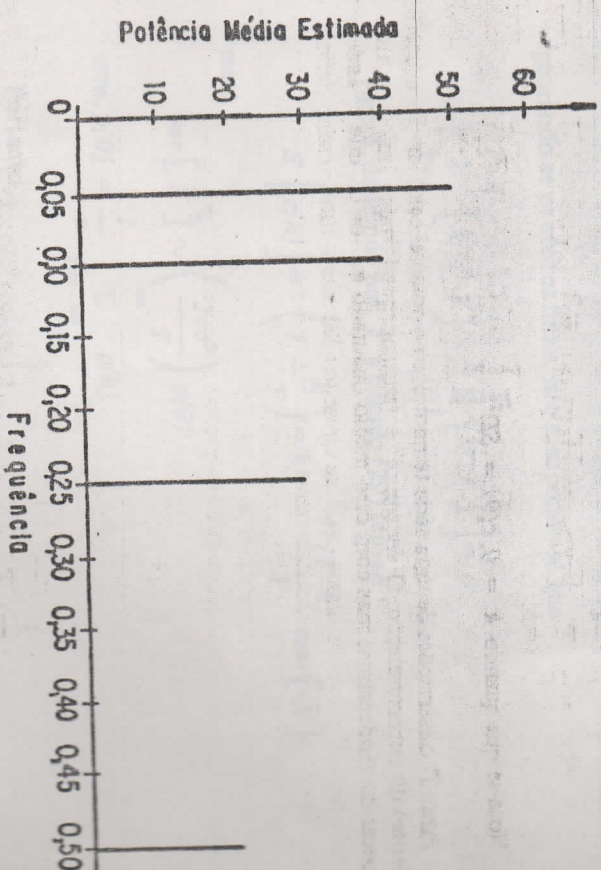


Figura 2.3. Espectro de linha.



### Função de Autocorrelação

A função de autocovariância, para uma série temporal estacionária com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , é definida como

$$\gamma(k) = E \left[ (X(t) - \mu)(X(t+k) - \mu) \right] \quad (25)$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\gamma(k)$  é função somente do atraso  $k$ . Desde que a variância  $\sigma^2$  de  $X(t)$  é igual a  $\gamma(0)$ , a função de autocorrelação é dada por

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Usualmente, a correlação entre  $X(t)$  e  $X(t+k)$  é definida por

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}[X(t), X(t+k)]}{\sqrt{\text{var}[X(t)]\text{var}[X(t+k)]}} \quad (27)$$

Como a série é estacionária, vem:

$$\text{var} [X(t)] = \text{var} [X(t+k)] = \gamma(0)$$

e, desde que,

$$\text{cov} [X(t), X(t+k)] = \gamma(k),$$

vê-se que (26) e (27) são iguais.

A função de autocovariância para a amostra é definida por,

$$c(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \quad (28)$$

Nota-se que quando  $k = 0$ ,  $c(0) = SD^2$ .

Para  $T$  observações de uma série temporal, só é possível calcular  $T-1$  coeficientes de autocorrelação. O divisor  $T$  é usado porque fornece uma estimativa, apesar de tendenciosa, mas com erro médio quadrado menor do que quando se divide por  $T-k$ . Além disso,  $c(k)$  na equação (28) é uma função semi-definida positiva e conveniente na relação para o teorema de Parseval.

Mostra-se que  $c(k)$ , dada pela equação (28), é um estimador assintoticamente não tendencioso de  $\gamma(k)$  da equação (25).

De fato, ignorando os efeitos de estimação da média  $\mu$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E \left[ c(k) \right] &= E \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \mu] [X(t+k) - \mu] \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} E \left[ X(t) - \mu \right] [X(t+k) - \mu] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} \gamma(k) = \left( 1 - \frac{k}{T} \right) \gamma(k). \quad (29)$$

Portanto,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E [c(k)] = \gamma(k).$$

Agora, considerando o efeito de estimar  $\mu$  por

$$\bar{X} = \sum_{t=1}^T X(t)/T \text{ a tendência do estimador } c(k) \text{ pode ser avaliada ao escrever}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \mu] [X(t+k) - \mu] = \\ &= \sum_{t=1}^{T-k} \left\{ [X(t) - \bar{X}] + [\bar{X} - \mu] \right\} \left\{ [X(t+k) - \bar{X}] + [\bar{X} - \mu] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^{T-k} \left\{ [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \right\} + (T-k) (\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

-Ignorando-se os efeitos finais, isto é, supondo-se que

$$\sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] \sim \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] = 0$$

Agora, dividindo por  $T$  e usando (29) tem-se

$$E [c(k)] = \left( 1 - \frac{k}{T} \right) \gamma(k) - \frac{(T-k)}{T} \text{var} [\bar{X}]$$

mas,

$$\text{var} [\bar{X}] \sim \left( \frac{2\pi\sigma^2}{T} \right) \rho(0)$$

$$\text{com, } \rho(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k),$$

Portanto,

$$E [c(k)] = \gamma(k) - \frac{k}{T} \gamma(k) - \frac{2\pi\sigma^2(T-k)}{T^2} \rho(0).$$